ISSN 1870-4069

Comparativo empírico de medidas de diversidad en problemas de optimización evolutiva con restricciones

Luis Enrique Contreras-Varela, Efrén Mezura-Montes

Universidad Veracruzana, Centro de Investigación en Inteligencia Artificial,
Xalapa, Veracruz, México

luisenrique.contreras.v@gmail.com, emezura@uv.mx

Resumen. La convergencia prematura es uno de los problemas centrales de los algoritmos evolutivos y su principal origen reside en la falta de diversidad en la población. Para monitorerar la diversidad es necesario aplicar medidas especiales, las cuales describen la dispersión en el espacio de las soluciones o de la función objetivo. Se han propuesto diferentes medidas de diversidad para optimización sin restricciones y su habilidad para medir diversidad al resolver problemas restringidos no ha sido estudiada exhaustivamente. En este trabajo se presenta un comparativo empírico del desempeño de seis medidas de diversidad aplicadas a dos algoritmos del estado del arte al resolver problemas de optimización con restricciones de la literatura especializada. Los resultados preliminares indican que las medidas de diversidad basadas en distancia entre pares de individuos tienen mejores resultados que el resto de medidas evaluadas.

Palabras clave: Algoritmos evolutivos, medidas de diversidad, optimización con restricciones.

Empirical Comparison of Diversity Measures in Constrained Optimization Problems

Abstract. Premature convergence is one of the central problems in evolutionary algorithms, and its main reason consists in the lack of diversity. In order to monitor diversity, special measures must be employed, which describe the population's spread over the search space or according to the fitness values. Some diversity measures have been proposed for unconstrained optimization and their capability to measure diversity when dealing with constrained problems has not been comprehensively studied. This paper presents an empiric comparison of six diversity measures applied to two state-of-the-art algorithms to solve constrained optimization problems from the literature. Preliminary results show that distance-based measures have the best results among the evaluated measures.

Keywords: Evolutionary algorithms, diversity measures, constrained optimization.

1. Introducción

Los algoritmos bio-inspirados son ampliamente utilizados para la optimización, al ser aplicables en una extensa gama de problemas y otorgar buenos resultados en un tiempo aceptable [6]. Estas técnicas suelen concluir su ejecución cuando ocurre el fenómeno llamado convergencia, donde los operadores de variación pierden la capacidad de generar nuevos individuos haciendo que todos los descendientes se encuentren en un subconjunto muy pequeño del espacio de búsqueda.

Si la convergencia se presenta antes de haber encontrado el óptimo global de la función se cataloga como convergencia prematura [12]. La convergencia prematura es uno de los principales problemas de los algoritmos evolutivos [5] y su principal origen reside en la falta de diversidad en la población, pues una vez que la población se ha tornado redundante el algoritmo toma una única trayectoria hacia el mejor individuo sin que éste sea necesariamente el óptimo [8].

La diversidad puede ser vista como un indicador de la disimilitud entre los individuos [8], una medida que aproxima el número de diferentes soluciones en la población en determinado momento [6].

Es evidente que la diversidad responde a la pregunta ¿Qué tan diferentes son los individuos de la población? Pero esta diferencia entre soluciones puede expresarse en distintas granularidades. De tal suerte, existen medidas de diversidad para los dos espacios en los que trabajan los algoritmos bio-inspirados, el espacio genotípico GDMs y el fenotípico PDMs [9]. Las GDMs están relacionadas con la ubicación de las soluciones en el espacio de búsqueda, mientras que las PDMs trabajan con los valores de aptitud de las soluciones [9].

Existen diversos trabajos relacionados con la diversidad, ya sea propiciándola en la población; o bien, aplicando medidas de diversidad para guiar la búsqueda del algoritmo o para el control de parámetros. Estos trabajos emplean algún método para medir diversidad. Para asegurarse que se está incrementando la diversidad en la población, mecanismos de promoción de la diversidad como el nitching no son suficientes debido a que se requiere conocer el paisaje de aptitud *a priori*. De modo que las medidas de diversidad son preferibles por ser métodos directos de sensar la diversidad [3]. A pesar de ello la habilidad de las distintas medidas reportadas en la literatura especializada para describir fielmente la diversidad no ha sido investigada exhaustivamente [3].

Para paliar esta situación, en los últimos años se han realizado nuevos estudios que comparan el desempeño de las diferentes medidas de diversidad, sean GDMs o PDMs, en diversos escenarios. Por ejemplo, en [14] Olorunda y Engelbrecht analizaron 6 diferentes GDMs aplicadas al algoritmo de cúmulo de partículas (PSO por sus siglas en inglés), en su trabajo encontraron que las medidas que responden mejor son la distancia promedio alrededor del centro del cúmulo y la distancia alrededor de todas las partículas. Otro estudio muy interesante es el de Corriveau et al. [2], ellos hicieron una recopilación de las GDMs propuestas en el área y las emplearon en dos experimentos: 1) Un comparativo con algoritmos del estado del arte resolviendo el benchmark CEC 2005. 2) La evaluación del desempeño de las medidas en un simulador de convergencia de su autoría.

Un tipo de problema en el que no se ha profundizado el estudio de diversidad es la optimización con restricciones. La diversidad es importante, pues como menciona Deb, es conveniente mantener la pluralidad entre las soluciones y así permitir a los operadores de cruza encontrar constantemente mejores soluciones factibles [4].

Hasta nuestro conocimiento, no existen medidas de diversidad ni estudios del desempeño de las medidas existentes enfocados específicamente en problemas de optimización con restricciones. Por este motivo, sería deseable evaluar el comportamiento de las medidas de diversidad existentes en la literatura en algoritmos de distinta naturaleza al resolver problemas restringidos, en busca de obtener un acercamiento a la diversidad en optimización con restricciones.

La contribución de este trabajo responde a tal necesidad, y consiste en un comparativo empírico del desempeño de medidas de diversidad en algoritmos del estado del arte para optimización con restricciones.

El documento se divide de la manera siguiente: en la Sección 2 expone el problema, optimización con restricciones y la aplicación de medidas de diversidad en este tipo de problemas. La Sección 3 describe la contribución, un comparativo empírico del desempeño de medidas de diversidad en algoritmos del estado del arte, en la Sección 4 se plantea el diseño experimental y se presentan los resultados. Finalmente la Sección 5 resume los hallazgos y esboza el trabajo futuro.

2. Definición del problema

La optimización numérica con restricciones se define como:

$$\begin{aligned} &\text{encontrar } \boldsymbol{x} \text{ que optimice } f(x) \text{ sujeto a} \\ &g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i = 1, ..., n, \\ &h_j(\boldsymbol{x}) = 0, j = 1, ..., p, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{x}$ es el vector de las soluciones $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, ..., X_\tau]^\tau$, n el número de restricciones de desigualdad y p el de restricciones de igualdad. La zona factible F es aquella que donde todas las restricciones se satisfacen y S es el espacio total de búsqueda, por lo que $F \subseteq S$ [1]. Para resolver este tipo de problemas es necesario un algoritmo que soporte restricciones. Existen múltiples manejadores de restricciones reportados en la literatura especializada, como la superioridad de puntos, las funciones de castigo, etc.

Es importante resaltar que no existen medidas de diversidad específicas para problemas restringidos, hasta el momento si se desea conocer la diversidad al resolver un problema de este tipo es necesario utilizar alguna de las medidas existentes, las cuales fueron pensadas para optimización sin restricciones.

Las GDMs son aplicables ya que solo requieren de la posición de cada individuo en la población, pero las PDMs tendrían un comportamiento poco informativo pues éstas, al haber sido diseñadas para problemas sin restricciones, asumen que el valor de la función objetivo de la mejor solución solo puede mejorar o permanecer en cada iteración del proceso de optimización. Lo anterior no sucede necesariamente en la optimización de problemas restringidos, donde el valor de la función objetivo de la mejor solución puede incrementarse o decrementarse si aún no se han satisfecho las restricciones (la dinámica dependerá de la técnica de manejo de restricciones seleccionada).

Debido a los problemas que presentan las medidas del espacio fenotípico este trabajo únicamente contempla GDMs para el comparativo.

La idea central tras las GDMs es representar la diversidad en términos de distancia Euclidiana entre individuos. Para representación real la mayoría de GDMs están basadas en distancia entre pares de individuos o la distancia máxima entre dos individuos de la población. Otro elemento importante de las medidas de diversidad es la normalización, la cual puede realizarse calculando la distancia de la diagonal del paisaje LD (distancia entre los extremos del espacio de búsqueda) o usando el valor de diversidad de la primera iteración *NMDF* [2].

3. Contribución

Este trabajo presenta un comparativo empírico del desempeño de distintas medidas de diversidad aplicadas en dos algoritmos del estado del arte de distinta naturaleza al resolver problemas de optimización con restricciones. El objetivo de comparar la diversidad en algoritmos de diferentes familias es no sesgar el estudio a causa de las particularidades de los mismos, pues algunos comportamientos pueden darse gracias a los mecanismos específicos de un tipo de algoritmo.

Los algoritmos seleccionados para el estudio son CMODE [16] y SAM-PSO [7], los cuales se describen en el siguiente apartado.

3.1. Algoritmos del estado del arte empleados

CMODE [16] (Combining Multiobjective Optimization with Differential Evolution): Es un algoritmo basado en Evolución Diferencial cuya manera de lidiar con las restricciones es transformar el problema original en uno multi-objetivo. El nuevo problema tendrá dos objetivos a optimizar: la suma de violación de restricciones y la función objetivo.

En cada iteración se generan γ descendientes R, si el descendiente $\boldsymbol{x_i} \in R$ domina $n > 1$ del conjunto Q de padres $\boldsymbol{x_i}$ sustituirá a uno de éstos seleccionado aleatoriamente. En caso de no producirse ninguna solución que domine al menos un individuo del conjunto Q de padres el mejor descendiente no factible $\boldsymbol{x'}$ se incluye en el archivo de soluciones no factibles A. Cada k generaciones los individuos del archivo sustituyen al mismo número de soluciones en la población, excluyendo del proceso a la mejor solución para que el porcentaje de factibilidad no se pierda.

Es importante resaltar que CMODE es un algoritmo de estado uniforme, gracias a la necesidad de tener soluciones no dominadas para que se dé el reemplazo de individuos y de que se cumplan las k generaciones necesarias para incluir soluciones no factibles, por lo que no necesariamente existirán cambios en la población en cada iteración.

SAM-PSO [7] (Self-adaptive mix of particle swarm methodologies):

Este algoritmo es una extensión a la optimización por cúmulo de partículas (PSO por sus siglas en inglés) que aplica diferentes estrategias simultáneamente durante el proceso de optimización y auto-adapta los parámetros de cada individuo. SAM-PSO divide la población de acuerdo al número de estrategias seleccionadas, progresivamente las proporciones de cada sub-cúmulo cambiarán en favor de la estrategia con mejores resultados. La implementación de los autores, al igual que la de este trabajo, incluye las siguientes variantes de PSO:

- *PSO local.* Trabaja de la misma manera que la variante de PSO original (PSO global) excepto que cada partícula es atraída por la mejor posición obtenida por los miembros de su vecindario local y no por la mejor posición de toda la población.
- *PSO con archivo.* La idea detrás de esta variante es conservar un archivo de soluciones pasadas para que exista un balance entre intensificación y diversificación de la búsqueda. Debido a que el archivo está formado por buenas soluciones e individuos cercanos al vector promedio, éste apoya tanto a la explotación de zonas prometedoras como a la variación de la población.
- *PSO sub-cúmulo* [10]. Esta estrategia divide la población en sub-cúmulos, y en cada uno de ellos la mejor partícula es identificada como el líder ese grupo. Los individuos no líderes de cada sub-cúmulo son actualizados escogiendo como g_{best} la mejor posición de una partícula aleatoria de su sub-cúmulo. Para el caso de los líderes, éstos evolucionarán usando la información de la mejor posición de otro líder elegido de manera aleatoria.

Adicionalmente, SAM-PSO añade mutación para prevenir convergencia prematura; problema importante en PSO, donde gracias a su rápida convergencia se incrementan las posibilidades de caer en óptimos locales.

3.2. Medidas de diversidad

En este documento se muestra un comparativo de algunas de las medidas de diversidad publicadas, en concreto se aplicaron seis medidas de diversidad en el espacio de las variables basadas en distancia: D^N_{DP}, D^{N2}_{TAP}, D^N_{TD}, D^N_{MI}, D^N_{PW} y D^N_{ED}. En la tabla 1 se listan las medidas y sus correspondientes formulaciones.

La selección de dichas medidas de diversidad tiene una intención similar a la del trabajo de Corriveau et al. [2], contrastar las medidas de diversidad más robustas contra las que mayores dificultades presentan, aunque en este caso aplicadas a optimización con restricciones. En su trabajo catalogan a D^N_{DP} y

D^N_{ED} como malos descriptores de diversidad mientras que D^{N2}_{TAP}, D^N_{TD}, D^N_{MI} y D^N_{PW} son algunas de las medidas con mejores resultados en sus experimentos sobre problemas sin restricciones.

Tabla 1. Medidas de diversidad utilizadas en el comparativo.

Número	Medida	Fórmula
1	Diámetro de la población	$D^N_{DP} = \frac{1}{LD}\,\text{máx}_{i\neq j\in(1,2,\ldots,N)} \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_{i,k} - x_{j,k})^2}$
2	Distancia al punto promedio	$D^{N2}_{TAP} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_{i,k}-\bar{x}_k)^2}}{NMDF}$
3	Momento de inercia	$D^N_{MI} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}(x_{i,k}-\bar{x}_k)^2}{NMDF}$
4	Diversidad verdadera	$D^N_{TD} = \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\bar{x^2}_k-\bar{x}_k)^2}}{NMDF}$ $\quad \bar{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x^2_{i,k}$
5	Media de la distancia entre pares	$D^N_{PW} = \frac{\frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_{i,k}-x_{j,k})^2}}{NMDF}$
6	Distancia Euclidiana al mejor individuo	$D^N_{ED} = \frac{\bar{d}-d_{min}}{d_{max}-d_{min}}$ $\bar{d} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_{i,k} - x_{best,k})^2}$ $d_{max} = \text{máx}_{i\in(1,2,\ldots,N)}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_{i,k} - x_{best,k})^2}$ $d_{min} = \text{mín}_{i\in(1,2,\ldots,N)}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_{i,k} - x_{best,k})^2}$

La primera medida, D^N_{DP}, lleva por nombre diámetro de la población [14], ella interpreta la diversidad usando la distancia entre los dos individuos más alejados de la población y normalizando los valores con la diagonal del espacio de búsqueda (o LD, acrónimo de *landscape diagonal*, la cual se obtiene computando la distancia entre los puntos formados por los límites inferiores y superiores del espacio de búsqueda). El no contemplar la dispersión de la población y unicamente ofrecer un valor con base en los extremos puede causar que no se describa correctamente la diversidad. Por otro lado utilizar LD para normalizar hace que la medida sea sensible a la dimensionalidad, pues las distancias se incrementan conforme aumenta el número de dimensiones [2].

En seguida se encuentra la distancia al punto promedio D^{N2}_{TAP} [15], la cual consiste en la media de las distancias de cada individuo de la población al vector promedio $\bar{\boldsymbol{x}}$. En esta medida la normalización se realiza mediante el valor máximo de diversidad hasta el momento (abreviado como $NMDF$), el cual comúnmente es el valor de diversidad obtenido en la primera generación; pues supone ser el momento en que la población se encuentra más dispersa.

Momento de inercia D^N_{MI} [13], la medida número 3, tiene el mismo principio que la distancia al punto promedio D^{N2}_{TAP}, aunque D^N_{MI} eleva al cuadrado las distancias haciendo más influyentes los valores atípicos.

Por otro lado, diversidad verdadera D^N_{TD}, interpreta la diversidad como la desviación estándar en cada dimensión de la población.

La quinta GDM es la media de la distancia entre pares D^N_{PW}. Esta intuitiva medida requiere que se calcule la distancia entre todas las combinaciones de pares de individuos, gracias a esto D^N_{PW} es la medida más completa aunque como consecuencia el cómputo se vuelve muy pesado.

La normalización de D^N_{MI}, D^N_{TD} y D^N_{PW}, al igual que en D^N_{TAP} se efectúa dividiendo el valor de diversidad obtenido en la iteración entre $NMDF$.

La última medida de diversidad considerada en el comparativo es D^N_{ED}. Como es evidente al observar su fórmula, D^N_{ED} difiere bastante en relación con las demás medidas presentadas ya que requiere conocer de antemano la mejor solución de la población en la generación. Nótese que la normalización se está llevando a cabo usando la diferencia de la distancias del individuo más alejado y más cercano al mejor, conforme avancen las generaciones dichas distancias decrecerán haciendo incapaz a la función de rastrear la convergencia de la población [2].

4. Experimentos y resultados

4.1. Diseño experimental

Se realizaron 25 ejecuciones de los algoritmos CMODE y SAM-PSO solucionando los problemas de prueba del benchmark CEC 2006 [11]. En este documento se presentan los resultados correspondientes a los primeros 13 problemas. En ambos algoritmos se conservaron los parámetros reportados en la experimentación de su correspondiente publicación, a excepción del tamaño poblacional y del número de evaluaciones permitidas; en ambos algoritmos se asignó un tamaño de población $NP = 180$ y número máximo de evaluaciones $FES = 500000$ (evaluaciones que propone el benchmark CEC 2006).

En ambos algoritmos por cada problema se tomó la ejecución con el resultado final ubicado en la mediana para graficar la diversidad con cada una de las medidas de la tabla 1, por cuestiones de espacio en el documento se muestran únicamente las gráficas de diversidad de las funciones más significativas.

Se computó el valor de todas las GDMs cada $NP = 180$ evaluaciones realizadas por los algoritmos. En el caso de SAM-PSO las medidas de diversidad emplearon la posiciones actuales de las partículas, y no los mejores valores de cada individuo. La tabla 4.1 lista los parámetros de CMODE y SAM-PSO.

También se obtuvieron valores estadísticos (véase la tabla 3) para no evaluar únicamente los comportamientos de convergencia descritos por las medidas de diversidad, si no también establecer el contexto de los resultados de cada algoritmo y así relacionar las estadísticas de los resultados finales con las gráficas de diversidad para cada problema resuelto de acuerdo a los mecanismos de cada algoritmo.

4.2. Desempeño de los algoritmos

Respecto a los resultados finales de las ejecuciones de ambos algoritmos (la tabla 3 muestran las estadísticas) se puede observar que CMODE encuentra mejores soluciones que SAM-PSO. En cuanto a factibilidad, el primero consigue que las 25 ejecuciones lleguen a la zona factible en casi todos los problemas; la excepción son los problemas $g03$ y $g07$, donde sólo el 16 % y 80 % alcanzaron el área factible, respectivamente. En cambio, SAM-PSO únicamente logra que el

Tabla 2. Parámetros de CMODE y SAM-PSO en el experimento.

CMODE		SAM-PSO	
NP	180	NP	180
FES	500000	FES	500000
CP	rand(0.90,0.95)	τ	[0.4,0.729]
F	rand(0.50,0.60)	c_1	[1.4,2]
γ	8	c_2	[1.4,2]
k	22	Variantes	*PSO local, PSO con archivo, PSO sub-cúmulo*
Estrategia ED	*rand*	NP_{arch}	$\frac{NP}{2}$
		N (archivo)	$\frac{NP}{5}$
		sub-cúmulos	5

100 % de ejecuciones satisfaga las restricciones en las funciones en los problemas $g06$, $g08$ y $g12$. Aunque para problemas con un espacio de búsqueda pequeño SAM-PSO puede no tener individuos en la zona factible al finalizar la ejecución debido a la mutación, lo cual no significaría que las partículas no guardan una posición factible en su memoria.

Otro aspecto notorio en el desempeño de los algoritmos es la estabilidad que demuestra CMODE en relación a SAM-PSO, en la mayoría de las funciones del benchmark la desviación estándar ($\sigma 2$) en SAM-PSO es mucho mayor que en CMODE. Particularmente existen diferencias considerables de desviación estándar en las funciones $g01$, $g04$, $g05$, $g07$, $g08$, $g10$ y $g11$; en cambio, sólo en la función $g03$ la desviación estándar es mayor en CMODE que SAM-PSO.

En general se aprecia que CMODE es el que mejor desempeño tiene entre los dos algoritmos. El mejor resultado es superior al de SAM-PSO en los problemas $g02$, $g03$, $g05$, $g07$, $g09$ y $g10$, mientras que en el resto de problemas ambos descubren la misma solución.

4.3. Resultados del comparativo de diversidad

En las figuras 1, 2, 3 y 4 se presentan los resultados de diversidad de la mediana de las ejecuciones de los algoritmos CMODE y SAM-PSO. Se tienen dos gráficos por función, correspondientes a cada uno de los algoritmos, exhibiendo las curvas de diversidad producidas por las seis GDMs de la tabla 1 en los dos algoritmos. A continuación se discuten los resultados, resumiendo los hallazgos por medida de diversidad evaluada.

Diámetro de la población. D^N_{DP}, representada en las gráficas con el color azul oscuro, utiliza la distancia entre los dos individuos más separados de la población y usa como factor de normalización la diagonal del espacio de búsqueda. Debido a lo anterior se puede prever en cierto sentido el comportamiento, pues mientras el algoritmo se encuentre en periodo de exploración es probable que la distancia más larga entre dos soluciones oscile fuertemente y por lo tanto su curva de diversidad se vea escarpada. Tal es el caso de ambos algoritmos al resolver las funciones $g02$ y de $g03$ con CMODE o $g02$, $g03$, $g11$ y $g13$ para SAM-PSO. Este problema no se ve reflejado en las gráficas donde la convergencia se da tan rápido que los vectores más alejados están prácticamente en el foco de convergencia desde las primeras iteraciones.

g2 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	-0.803623789327	-0.803365020017
Mean	-0.800686985414	-0.792155641674
Median	-0.803623667644	-0.788432576597
Worst	-0.785269658317	-
Std.	0.00539501789782	0.0088797657819
FP	1.0	0.68

g2 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	-0.803623789327	-0.803365020017
Mean	-0.800686985414	-0.792155641674
Median	-0.803623667644	-0.788432576597
Worst	-0.785269658317	-
Std.	0.00539501789782	0.0088797657819
FP	1.0	0.68

Fig. 1. Resultados para el problema $g02$ con CMODE y SAM-PSO.

Existe una situación particular con cada uno de los algoritmos al aplicar esta medida de diversidad: SAM-PSO incluye mutación, lo que propicia la exploración pero también podría hacer que la distancia entre los individuos más separados crezca. En CMODE sucede algo similar gracias a la introducción de soluciones no factibles del archivo cuando el algoritmo no es capaz de encontrar soluciones no dominadas, fenómeno visible en las funciones $g08$, $g09$ y $g11$; cada vez que individuos del archivo se incluyen en la población se observa un salto muy grande de diversidad.

Distancia al punto promedio, momento de inercia, diversidad verdadera y media de la distancia entre pares. Este conjunto de GDMs se muestra en las gráficas con los colores verde, rojo, azul claro y morado. Como se comentó en secciones anteriores, las cuatro medidas toman en cuenta a todos los individuos para describir la diversidad de la población y todas normalizan los resultados con la diversidad calculada en la primera generación, la mejor forma de normalizar de acuerdo al estudio de Corriveau et al. [2].

A pesar de tener diferencias en sus formulaciones, D^{N2}_{TAP}, D^{N}_{MI}, D^{N}_{TD} y D^{N}_{PW} trazan curvas de diversidad muy similares e incluso en algunos problemas el comportamiento es casi idéntico; tal es el caso en casi todas las funciones evaluadas. Existen algunos casos donde, aunque el comportamiento es similar, las gráficas difieren un poco: para CMODE esto sucede con las funciones $g02$ y $g08$, donde claramente se aprecia que D^{N}_{MI} y D^{N}_{TD} se encuentran alineadas pero separadas de D^{N2}_{TAP} y D^{N}_{PW}, que a su vez delinean los mismos valores de diversidad. Una situación distinta a las anteriores ocurre en la función $g03$, problema con un espacio de búsqueda pequeño ($[0,1]^{10}$); todas las medidas evaluadas indican estancamiento en la población aunque cada una sugiere una dispersión diferente en la población. D^{N}_{TD} y D^{N}_{MI} tienen los valores más bajos, lo cual es ocasionado por el tamaño del espacio de búsqueda, ya que D^{N}_{MI} eleva al cuadrado las distancias mientras que D^{N}_{TD} lo hace con la diferencia de la media de cada dimensión al alelo correspondiente del punto promedio. Debido a que la distancia más larga que puede existir en la población es LD, cuyo valor es de 3.1622, al elevar los valores a la segunda potencia estos se homogenizan,

g3 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	-1.00100040008	-1.00085118529
Mean	-0.61500684236	-0.999079806126
Median	-0.646760402447	-0.989127804122
Worst	-	-
Std.	0.317001761452	0.00297753985669
FP	0.16	0.52

g3 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	-1.00100040008	-1.00085118529
Mean	-0.61500684236	-0.999079806126
Median	-0.646760402447	-0.989127804122
Worst	-	-
Std.	0.317001761452	0.00297753985669
FP	0.16	0.52

g6 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	-6961.93682853	-6961.93682853
Mean	-6961.93682853	-6961.93682853
Median	-6961.93682853	-6961.93682853
Worst	-	-6961.93682853
Std.	0.0	1.04492985821e-12
FP	0.68	1.0

g6 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	-6961.93682853	-6961.93682853
Mean	-6961.93682853	-6961.93682853
Median	-6961.93682853	-6961.93682853
Worst	-	-6961.93682853
Std.	0.0	1.04492985821e-12
FP	0.68	1.0

g7 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	24.3060374155	24.8912591955
Mean	24.3060374155	26.1580483849
Median	24.3060374155	26.0773741064
Worst	-	-
Std.	8.50225527548e-15	1.31049956133
FP	0.88	0.84

g7 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	24.3060374155	24.8912591955
Mean	24.3060374155	26.1580483849
Median	24.3060374155	26.0773741064
Worst	-	-
Std.	8.50225527548e-15	1.31049956133
FP	0.88	0.84

g8 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	-0.095825041418	-0.095825041418
Mean	-0.095825041418	-0.095825041418
Median	-0.095825041418	-0.095825041418
Worst	-	-0.095825041418
Std.	1.11632878849e-17	2.92423134397e-17
FP	0.68	1.0

g8 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	-0.095825041418	-0.095825041418
Mean	-0.095825041418	-0.095825041418
Median	-0.095825041418	-0.095825041418
Worst	-	-0.095825041418
Std.	1.11632878849e-17	2.92423134397e-17
FP	0.68	1.0

Fig. 2. Resultados para problemas $g03$, $g06$, $g07$ y $g08$ con CMODE y SAM-PSO.

g9 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	680.629943402	680.688628672
Mean	680.629943402	680.841567111
Median	680.629943402	680.825108765
Worst	680.629943402	-
Std.	9.37485680337e-14	0.230279784477
FP	1.0	0.8

g9 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	680.629943402	680.688628672
Mean	680.629943402	680.841567111
Median	680.629943402	680.825108765
Worst	680.629943402	-
Std.	9.37485680337e-14	0.230279784477
FP	1.0	0.8

g11 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	0.7498	0.749830118447
Mean	0.7498	0.749880399459
Median	0.7498	0.956942145085*
Worst	-	-
Std.	1.11022302463e-16	5.02810124679e-05
FP	0.8	0.08

g11 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	0.7498	0.749830118447
Mean	0.7498	0.749880399459
Median	0.7498	0.956942145085*
Worst	-	-
Std.	1.11022302463e-16	5.02810124679e-05
FP	0.8	0.08

g12 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	-1.0	-1.0
Mean	-1.0	-1.0
Median	-1.0	-1.0
Worst	-1.0	-1.0
Std.	0.0	1.15377761183e-16
FP	1.0	1.0

g12 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	-1.0	-1.0
Mean	-1.0	-1.0
Median	-1.0	-1.0
Worst	-1.0	-1.0
Std.	0.0	1.15377761183e-16
FP	1.0	1.0

g13 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	0.0539374983859	0.481631186566
Mean	0.361804709732	0.853082070219
Median	0.438771512569	0.894796108884*
Worst	0.438771512569	-
Std.	0.153933605673	0.16757463722
FP	1.0	0.4

g13 (500000 FES)

	CMODE	SAM-PSO
Best	0.0539374983859	0.481631186566
Mean	0.361804709732	0.853082070219
Median	0.438771512569	0.894796108884*
Worst	0.438771512569	-
Std.	0.153933605673	0.16757463722
FP	1.0	0.4

Fig. 3. Resultados para problemas $g09$, $g11$, $g12$ y $g13$ con CMODE y SAM-PSO.

resultando en valores de diversidad más bajos.

Para SAM-PSO también se obtuvieron gráficas de diversidad que exhiben los comportamientos antes mencionados: en la gran mayoría de los problemas las cuatro medidas dibujan sus curvas de diversidad con casi la misma trayectoria, $g02$, $g03$ y $g13$ guardan el mismo comportamiento con una separación mínima entre las curvas. Una situación especial es el resultado del problema $g11$, cuyo espacio de búsqueda $[-1, 1]^2$ resulta tan pequeño que la mutación de SAM-PSO hace que la población nunca converja, sin que esto signifique que no se optimizó la función pues las partículas pueden tener almacenada en la memoria una buena solución. En cuanto a D^{N2}_{TAP} y D^{N}_{PW}, permanecen cercanas en todas las funciones de prueba de ambos algoritmos. Teóricamente D^{N}_{PW} tendría que ofrecer la mejor descripción de diversidad entre las cuatro ya que contempla la distancia entre todos los individuos, aunque el costo computacional es mucho más elevado que el resto de medidas.

Distancia Euclidiana al mejor individuo. La última medida considerada, trazada en color café , tiene muchos problemas. Al observar las curvas de diversidad que D^{N}_{ED} dibuja por cada una de las funciones éstas resultan poco informativas. Únicamente si la convergencia se da muy pronto es posible que D^{N}_{ED} describa la diversidad correctamente, por ejemplo en las funciones $g06$, $g08$, $g09$ y $g11$ con CMODE.

El principal problema reside en que la normalización es incorrecta; si el algoritmo converge, la distancia promedio al mejor vector y el factor de normalización $(d_{max} - d_{min})$ decrecerán, causando una curva de diversidad que se mantiene en el mismo intervalo de diversidad sin demostrar la concentración de individuos que presenta la población. En caso de estancamiento o exploración sin convergencia, las distancias al mejor vector cambiarán muy poco, también se obtendrá una trayectoria escarpada y atrapada en valores cercanos de diversidad.

5. Conclusiones

En este trabajo se presentó un comparativo empírico del desempeño de seis medidas de diversidad aplicadas a dos algoritmos del estado del arte, CMODE [16] y SAM-PSO [7], al resolver las funciones de prueba del benchmark CEC2006, estudio necesario ya que únicamente se han publicado comparativos de medidas de diversidad para problemas sin restricciones.

Los resultados indican que D^{N2}_{TAP} y D^{N}_{PW} describen mejor la diversidad que el resto de medidas, al ser consistentes en ambos algoritmos y todas las funciones de prueba evaluadas. En algunos escenarios el costo computacional es un problema, cuando éste es el caso D^{N}_{TAP} podría ser la mejor opción pues sólo calcula NP distancias, a diferencia de D^{N}_{PW}, la cual computa todas los pares de distancias posibles.

D^{N}_{ED} y D^{N}_{DP} son malos descriptores, pero a pesar de que D^{N}_{DP} no calcula correctamente la diversidad podría ser útil para rastrear mecanismos de promoción de diversidad, como sucede en CMODE cuando se introducen soluciones no factibles y el gráfico de diversidad lo refleja con cambios abruptos.

Tabla 3. Estadísticas de 25 ejecuciones de $g01$ a $g13$ en CMODE y SAM-PSO.

$g01$	CMODE	SAM-PSO	$g02$	CMODE	SAM-PSO	$g03$	CMODE	SAM-PSO
Mejor	-15.00005	-15.00005	Mejor	-0.803623	-0.803365	Mejor	-1.0010	-1.0008511
Media	-15.00005	-14.94535	Media	-0.800686	-0.792155	Media	-0.6115	-0.999879
Mediana	-15.00005	-14.88988	Mediana	-0.803623	-0.788432	Mediana	-0.6467	-0.989127
Peor	-15.00005	-	Peor	-0.785269	-	Peor	-	-
σ^2	0.0	0.0794	σ^2	0.00539	0.0088	σ^2	0.31788	0.00297
%EF	100 %	56 %	%EF	100 %	68 %	%EF	16 %	52 %
$g04$	CMODE	SAM-PSO	$g05$	CMODE	SAM-PSO	$g06$	CMODE	SAM-PSO
Mejor	-30665.61	-30665.61	Mejor	5126.4961	5127.39	Mejor	-6961.93	-6961.93
Media	-30665.61	-30659.78	Media	5126.4961	5173.81	Media	-6961.93	-6961.93
Mediana	-30665.61	-30659.35	Mediana	5126.4961	5211	Mediana	-6961.93	-6961.93
Peor	-30665.61	-	Peor	5126.4961	-	Peor	-6961.93	-6961.93
σ^2	0.0	13.72	σ^2	$6.289e^{-13}$	42.02	σ^2	0.0	0.0
%EF	100 %	64 %	%EF	100 %	32 %	%EF	100 %	100 %
$g07$	CMODE	SAM-PSO	$g08$	CMODE	SAM-PSO	$g09$	CMODE	SAM-PSO
Mejor	24.306037	24.89125	Mejor	-0.095825	-0.095825	Mejor	680.62994	680.68862
Media	24.306037	26.15804	Media	-0.095825	-0.095825	Media	680.62994	680.84156
Mediana	24.306037	26.07737	Mediana	-0.095825	-0.095825	Mediana	680.62994	680.82510
Peor	-	-	Peor	-0.095825	-0.095825	Peor	680.62994	-
σ^2	$8.50e^{-15}$	1.3104	σ^2	$1.11e^{-}17$	0.0	σ^2	$9.37e^{-14}$	0.2302
%EF	88 %	84 %	%EF	100 %	100 %	%EF	100 %	80 %
$g10$	CMODE	SAM-PSO	$g11$	CMODE	SAM-PSO	$g12$	CMODE	SAM-PSO
Mejor	7048.7269	7160.465	Mejor	0.7498	0.74983	Mejor	-1.0	-1.0
Media	7048.7269	7656.016	Media	0.7498	0.74988	Media	-1.0	-1.0
Mediana	7048.7269	7888.102	Mediana	0.7498	0.74993	Mediana	-1.0	-1.0
Peor	7048.7269	-	Peor	0.7498	-	Peor	-1.0	-1.0
σ^2	$9.67e^{-8}$	539.10	σ^2	$1.11e^{-16}$	$5.02e^{-5}$	σ^2	0.0	$1.1537e^{-16}$
%EF	100 %	60 %	%EF	100 %	80 %	%EF	100 %	100 %
$g13$	CMODE	SAM-PSO						
Mejor	0.05393	0.48163						
Media	0.36180	0.85308						
Mediana	0.43877	0.99823						
Peor	0.43877	-						
σ^2	0.1539	0.16757						
% E. F.	100 %	40 %						

Como trabajo futuro resta evaluar las medidas del espacio fenotípico, pues ellas interpretan la diversidad con base en el valor de aptitud. Para ser aplicadas en optimización con restricciones debe considerarse que el valor de aptitud no decrecerá de manera directa como sucede en la optimización sin restricciones. Sería interesante probar el desempeño de las medidas de diversidad del espacio fenotípico usando el valor de aptitud y las violaciones de restricciones. Otro aspecto a investigar es la influencia del manejador de restricciones en el comportamiento de las medidas de diversidad, pues el manejador es un elemento central en los algoritmos para optimización con restricciones.

Finalmente se debe reconocer que un comparativo como el presentado en este documento no puede reflejar si las medidas de diversidad son aplicables en todos los algoritmos de optimización con restricciones, ya que es necesario medir diversidad en escenarios donde se tenga un comportamiento esperado antes de evaluar el desempeño de las medidas [2]. Al medir diversidad en algoritmos el comportamiento está sesgado por las estrategias y mecanismos que ellos implementan. En este sentido, desarrollar un simulador de optimización con restricciones donde sea posible generar escenarios con un comportamiento esperado puede ayudar a evaluar mejor las medidas y posteriormente diseñar una nueva medida de diversidad específica para entornos restringidos.

Agradecimientos. El primer autor agradece el apoyo de CONACyT para realizar estudios de posgrado en la Universidad Veracruzana. El segundo autor agradece el apoyo de CONACyT mediante el proyecto No. 220522.

Referencias

1. Coello, C.A.C.: Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms: a survey of the state of the art. Computer methods in applied mechanics and engineering 191(11), 1245–1287 (2002)
2. Corriveau, G., Guilbault, R., Tahan, A., Sabourin, R.: Review and study of genotypic diversity measures for real-coded representations. IEEE transactions on evolutionary computation 16(5), 695–710 (2012)
3. Corriveau, G., Guilbault, R., Tahan, A., Sabourin, R.: Evaluation of genotypic diversity measurements exploited in real-coded representation. arXiv preprint arXiv:1507.00088 (2015)
4. Deb, K.: An efficient constraint handling method for genetic algorithms. Computer methods in applied mechanics and engineering 186(2), 311–338 (2000)
5. Diaz-Gomez, P.A., Hougen, D.F.: Empirical study: Initial population diversity and genetic algorithm performance. Artificial Intelligence and Pattern Recognition 2007, 334–341 (2007)
6. Eiben, A.E., Smith, J.E.: Introduction to evolutionary computing, vol. 53. Springer (2003)
7. Elsayed, S.M., Sarker, R.A., Mezura-Montes, E.: Self-adaptive mix of particle swarm methodologies for constrained optimization. Information sciences 277, 216–233 (2014)
8. Friedrich, T., Oliveto, P.S., Sudholt, D., Witt, C.: Analysis of diversity-preserving mechanisms for global exploration. Evolutionary Computation 17(4), 455–476 (2009)
9. Herrera, F., Lozano, M.: Adaptation of genetic algorithm parameters based on fuzzy logic controllers. Genetic Algorithms and Soft Computing 8, 95–125 (1996)
10. Liang, J.J., Suganthan, P.N.: Dynamic multi-swarm particle swarm optimizer with a novel constraint-handling mechanism. In: Evolutionary Computation, 2006. CEC 2006. IEEE Congress on. pp. 9–16. IEEE (2006)
11. Liang, J., Runarsson, T.P., Mezura-Montes, E., Clerc, M., Suganthan, P., Coello, C.C., Deb, K.: Problem definitions and evaluation criteria for the cec 2006 special session on constrained real-parameter optimization. Journal of Applied Mechanics 41(8) (2006)
12. Mauldin, M.L.: Maintaining diversity in genetic search. In: AAAI. pp. 247–250 (1984)
13. Morrison, R.W., De Jong, K.A.: Measurement of population diversity. In: International Conference on Artificial Evolution (Evolution Artificielle). pp. 31–41. Springer (2001)
14. Olorunda, O., Engelbrecht, A.P.: Measuring exploration/exploitation in particle swarms using swarm diversity. In: 2008 IEEE Congress on Evolutionary Computation (IEEE World Congress on Computational Intelligence). pp. 1128–1134. IEEE (2008)
15. Ursem, R.K.: Diversity-guided evolutionary algorithms. In: International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. pp. 462–471. Springer (2002)

16. Wang, Y., Cai, Z.: Combining multiobjective optimization with differential evolution to solve constrained optimization problems. IEEE Transactions on Evolutionary Computation 16(1), 117–134 (2012)